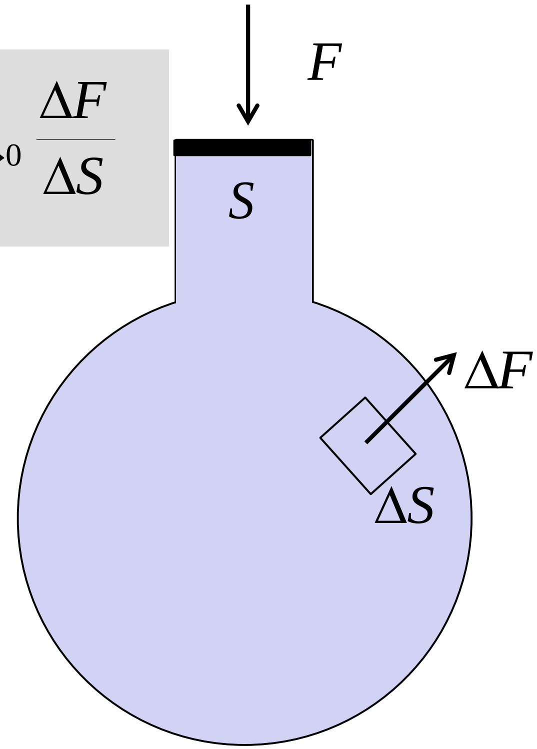
Mechanika tekutin – Rovnováha, Hydrostatika

• **Tekutiny** – společné označení pro kapaliny a plyny.

• Tlak: $$p = \frac{F}{S} \qquad [\mathrm{Pa}] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



• **Dokonalá tekutina** – spojitě rozprostřená látka, pro kterou v každém bodě platí :

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p, \qquad \sigma_{ij} = 0 \ pro\ i \neq j$$

$$p \geq 0$$

• **Smyková napětí** jsou v dokonalé tekutině vždy **nulová**, modul pružnosti ve smyku je nulový G=0. Dokonalá tekutina se nebrání změně tvaru.

• V ideální tekutině **nelze realizovat tahová napětí**.

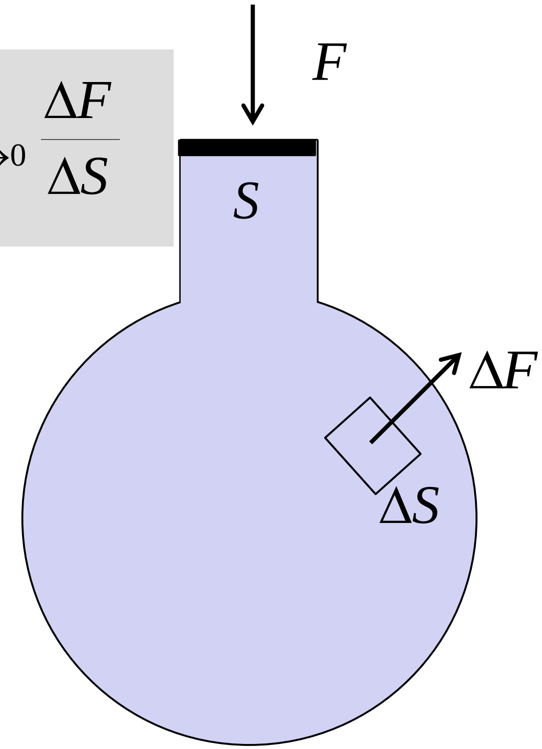
• **Dokonalá kapalina** je **nestlačitelná**: $\rho(\vec{r}) = konst, \quad p \geq 0$

• Jelikož se objem dokonalé kapaliny nemění, je první invariant tenzoru deformace nulový:

$$V = abc \doteq a_0 b_0 c_0 + a_0 b_0 c_0 \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = V_0 + V_0 \varepsilon_I \Rightarrow \varepsilon_I = \frac{V - V_0}{V_0} = 0$$

Mechanika tekutin - Rovnováha

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



• **Dokonalý plyn** je stlačitelný, známe-li stavovou rovnici plynu (např. pro ideální plyn $pV/T = n\mathrm{R} = n\mathrm{N_A k_B} = konst.$), můžeme určit hustotu plynu jako funkci tlaku v daném místě:

$$\rho = \rho\left(p(\vec{r})\right)$$

• I pro tekutiny platí rovnice rovnováhy kontinua:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}\, p \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial i} + G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

$$\nabla p \equiv \mathrm{grad}\left(p\right) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}\,, \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}\,, \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) = \vec{G}$$

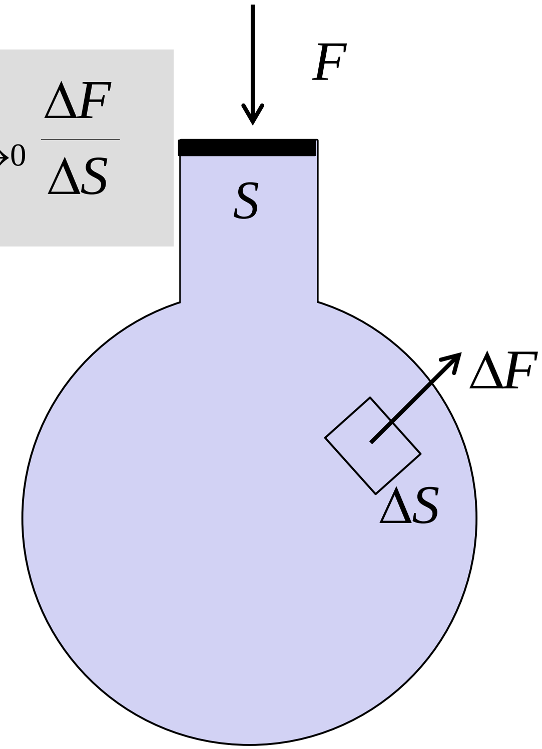
• U kapalin je hustota konstantní a objemové síly můžeme stanovit před řešením rovnice rovnováhy.
• U plynů ale závisí hustota na tlaku a je výhodnější do rovnice zavést intenzitu silového pole, hovoříme potom o **rovnici hydrostatické rovnováhy** :

$$\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{V\vec{G}}{m} = \frac{\vec{G}}{\rho(p)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho(p)}\mathrm{grad}(p) = \vec{I}, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad i = x, y, z$$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon

• Pro kapalinu (ρ=konst.) jsou parciální derivace tlaku nezávislé na tlaku. Objemovými silami je tedy rozložení tlaku (řešení rovnice) v kapalině určeno až na aditivní konstantu: $f(\vec{r}),\quad p(\vec{r}) = f(\vec{r}) + k$

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



Okrajové podmínky (určení jedné konstanty) se redukují na znalost tlaku v libovolném jednom bodě kapaliny. Změníme-li v tomto bodě tlak, změní se o stejnou hodnotu i konstanta *k* a tím i tlak libovolném bodě kapaliny.

$$p(\vec{r}_0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = f(\vec{r}_0) + k \quad \Rightarrow \quad k = p_0 - f(\vec{r}_0)$$

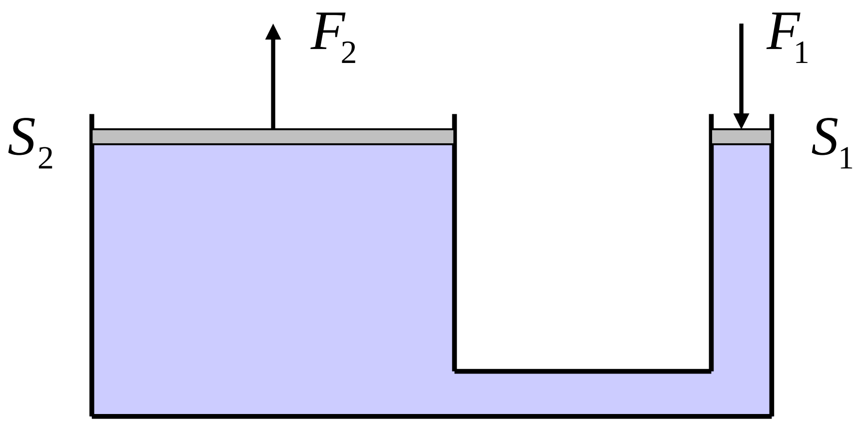
$$p(\vec{r}_0) = p_0 + \Delta p \quad \Rightarrow \quad p_0 + \Delta p = f(\vec{r}_0) + k \quad \Rightarrow \quad k = p_0 - f(\vec{r}_0) + \Delta p$$

•**Pascalův zákon: „**Změna tlaku v jednom místě kapaliny způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny, pokud je před změnou i po změně kapalina v rovnováze.“

Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon

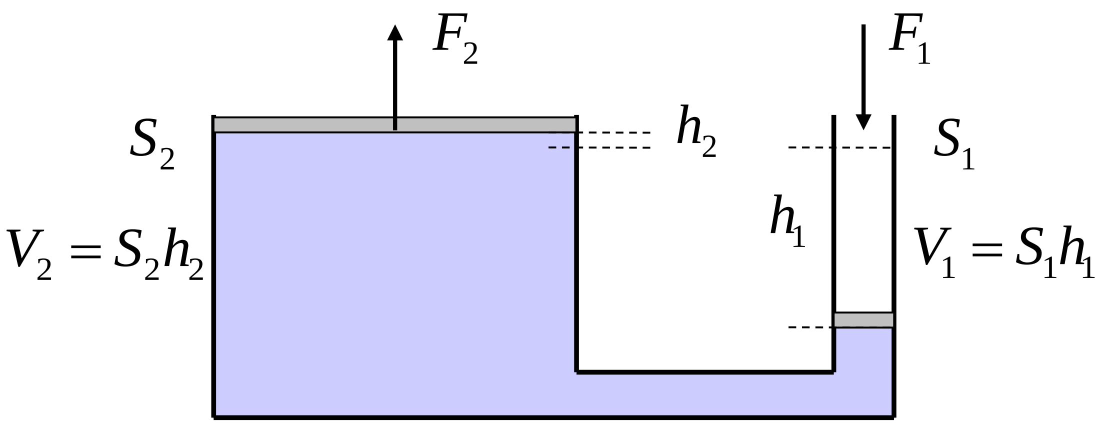
- Hydraulický lis, můžeme zanedbat objemové síly:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = konst.$$

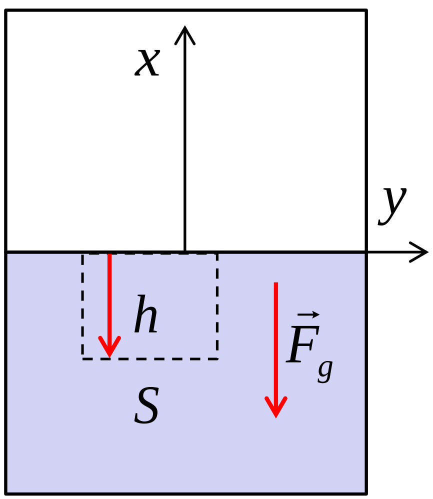


$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = p_2 = \frac{F_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

- Práce: $V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 h_1 = S_2 h_2 \quad \Rightarrow \quad F_1 h_1 = F_2 h_2$



Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon



• Tekutina v tíhovém poli $F_x = -mg$

• Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy :

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad I_x = \frac{F_x}{m} = -g, \quad I_y = 0, \quad I_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial x} = -g, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

• Tlak nezávisí tedy na souřadnicích *y* a *z*.

• Pro dokonalou (nestlačitelnou) kapalinu je ρ = konst. Dostaneme tedy pro **hydrostatický tlak**:

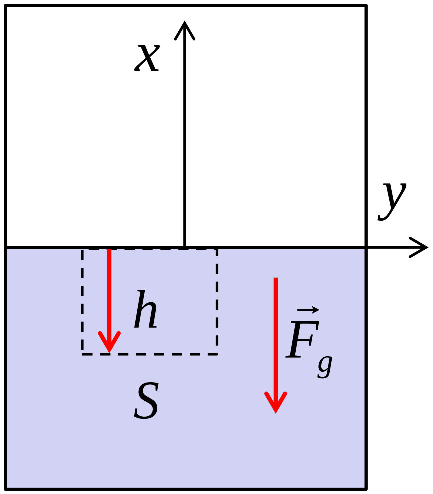
$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\rho\, g \quad \Rightarrow \quad p(x) = -\rho g x + k$$

• Na hladinu $x = -h = 0$ nám působí pouze barometrický tlak *b*:

$$p(0) = b = -\rho g 0 + k \quad \Rightarrow p(h) = h\rho g + b$$

$$\Delta p = p(h) - p(0) = h\rho g$$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon



- Tekutina v tíhovém poli
- Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy :

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad I_x = -g, I_y = 0, I_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial x} = -g, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

- Tlak nezávisí tedy na souřadnicích *y* a *z*.

- Závislost tlaku plynu na výšce v tíhovém poli lze určit pokud známe stavovou rovnici plynu:

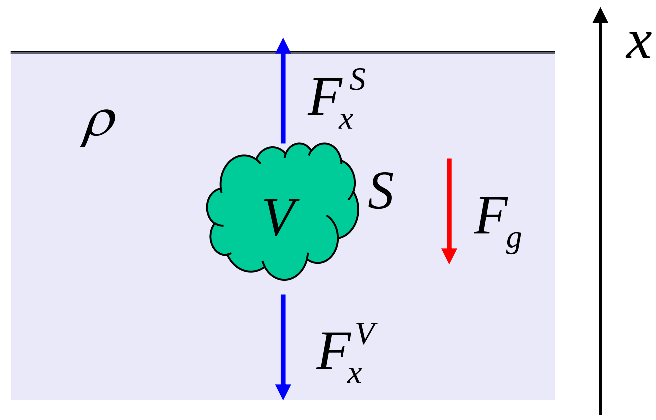
$$pV = nRT = \frac{m}{M}N_A k_B T, \quad \frac{N_A k_B T}{M} = C \quad \Rightarrow \rho(p) = \frac{m}{V} = \frac{p}{C} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{C}p$$

$$p(x) = Ae^{\alpha x} \quad \Rightarrow A\alpha e^{\alpha x} + A\frac{g}{C}e^{\alpha x} = 0 \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{g}{C} \quad \Rightarrow p(x) = Ae^{-\frac{g}{C}x}$$

- U hladiny moře $x = 0$ nám působí tlak p_0 a hustota ρ_0. Pro **barometrickou rovnici** dostáváme:

$$p(0) = p_0 = Ae^0, \quad \frac{1}{C} = \frac{\rho_0}{p_0} \quad \Rightarrow p(x) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gx}, \quad kde \quad p_0 \doteq 10^5\,\mathrm{Pa}, \rho_0 \doteq 1{,}2\ \mathrm{kgm}^{-3}$$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon



- V rovnováze musí být součet výslednice objemových sil a výslednice plošných sil nulový:

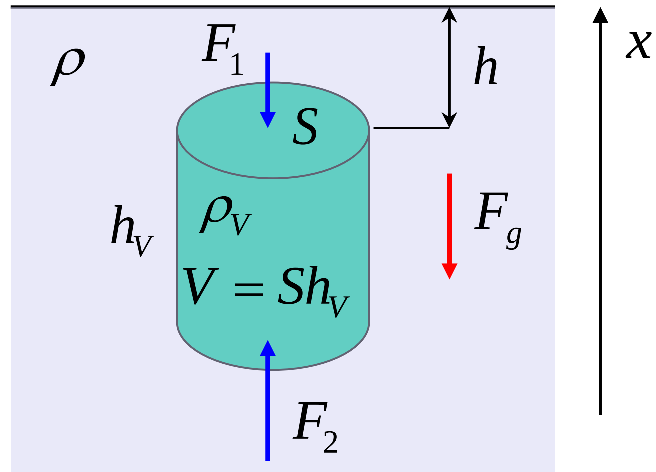
$$\vec{F}^S + \vec{F}^V = 0 \quad \Rightarrow F_i^S = -F_i^V$$

- Složky výslednice objemových sil: $F_i^V = \int_V G_i \, \mathrm{d}V$
- Složky výslednice plošných sil: $F_i^S = \int_S \sigma_{\nu i} \, \mathrm{d}S$
- Je-li objemovou silou tíhová síla: $F_x^V = -g \int_V \rho \, \mathrm{d}V, \quad F_y^V = 0, \quad F_z^V = 0$
- Potom je **vztlaková síla**: $F_x^S = g \int_V \rho \, \mathrm{d}V, \quad F_y^S = 0, \quad F_z^S = 0$

- **Archimédův zákon:**

Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze tekutiny tělesem vytlačené.

Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon



• Hydrostatický tlak nezávisí na souřadnicích *y* a *z*, síly působící na válcovou plochu se tedy vykompenzují.

• plošné síly působí tedy jenom na podstavy válce:

$$F_1 = p_1 S = h\rho g S$$

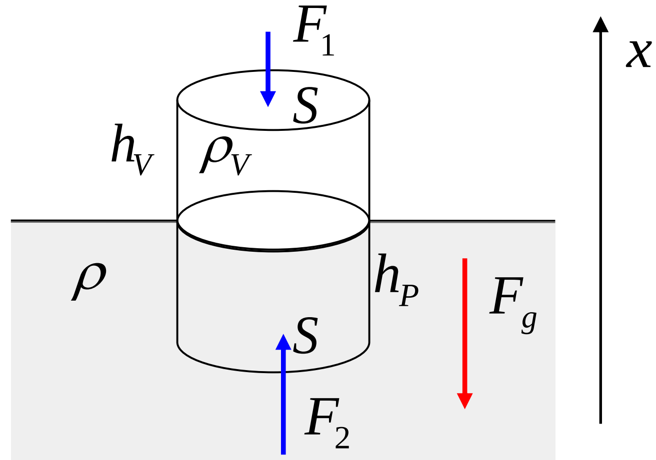
$$F_2 = p_2 S = (h + h_V)\rho g S$$

• Vztlaková síla:

$$F_2 - F_1 = (h + h_V)\rho g S - h\rho g S = h_V \rho g S = \rho V g$$

tíha tekutiny
vytlačené tělesem

Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon



- rovnováha $F_2 - F_1 - F_g = 0$

- plošné síly působí jenom na podstavy válce:

$$F_1 = p_1 S = 0$$

$$F_2 = p_2 S = h_P \rho g S$$

- Vztlaková síla: $F_2 - F_1 = h_P \rho g S$

- Tíha tělesa: $F_g = \rho_V h_V S g$

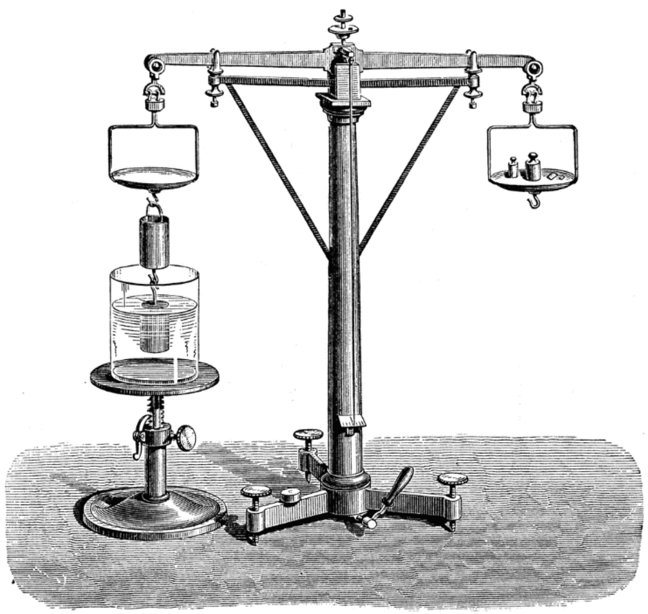
- Z podmínky rovnováhy dostaneme: $F_2 - F_1 - F_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_V h_V = \rho h_P$

- podmínka plavání: $h_P \le h_V \quad \Rightarrow \quad \rho_V \le \rho$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon – měření hustoty

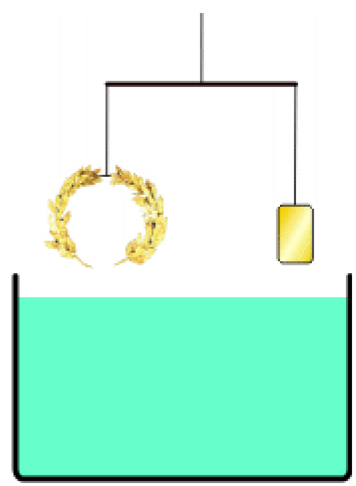
• vážení na vzduchu: $m_1 g = \rho_T V g$ $\qquad m_1 = \rho_T V \quad \Rightarrow V = \dfrac{m_1}{\rho_T}$

• vážení ve vodě: $m_2 g = m_1 g - F_{\mathrm{vztlak}} = \rho_T V g - \rho V g$ $\qquad m_2 = \rho_T V - \rho V$



$$m_2 = \rho_T \frac{m_1}{\rho_T} - \rho \frac{m_1}{\rho_T} \quad \Rightarrow$$

$$\rho_T = \frac{m_1}{m_1 - m_2} \rho$$

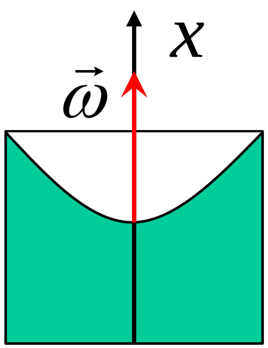


• Archimédes, Syrakusy (287-212 př. n.l.)

$$\rho_{Au} = 19.3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

$$\rho_{Ag} = 10.49\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

Mechanika tekutin – Rotující kapalina



- Rovnici hydrostatické rovnováhy užijeme pro sledování rovnováhy kapaliny za působení dalších objemových sil.
- Zvolíme soustavu souřadnou pevně spjatou s kapalinou.
- Jediná pravá síla je objemová tíhová síla:

$$G_x^g = -\rho g, \quad G_y^g = 0, \quad G_z^g = 0,$$

- Zdánlivá objemová odstředivá síla je dána složkami:

$$G_x^O = 0, \quad G_y^O = \rho\omega^2 y, \quad G_z^O = \rho\omega^2 z$$

- Rovnice hydrostatické rovnováhy dostaneme tedy ve tvaru:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\omega^2 z$$

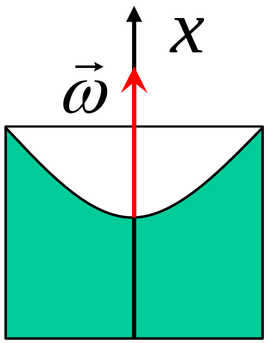
- Z první rovnice dostaneme řešení ve tvaru: $p = -\rho g x + f_1(y,z)$
- Dosadíme do druhé rovnice a pro funkci f_1 dostaneme podmínku:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \rho\omega^2 y \quad \Rightarrow f_1(y,z) = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + f_2(z)$$

- Dosadíme do třetí rovnice a pro funkci f_2 dostaneme podmínku:

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \rho\omega^2 z \quad \Rightarrow f_2(z) = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 z^2 + k$$

Mechanika tekutin – Rotující kapalina



• Pro rozložení tlaku v rotující kapalině dostaneme tedy ve výsledku:

$$p = -\rho g x + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2(y^2 + z^2) + k$$

• Plochy, ve kterých kapalina nabývá stejného tlaku p=K jsou rotační paraboloidy:

$$x = \tfrac{1}{2}\rho\frac{\omega^2}{g}(y^2 + z^2) + \frac{k-K}{\rho g}$$

• Jednotlivé plochy se liší konstantou: $\dfrac{k-K}{\rho g}$